高阶导数

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定义 (二阶导数)

一般地, 函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数, 我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶导数, 记作 y'' 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, 即

$$y''=(y')' \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

定义 (二阶导数)

一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数，我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')' \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

- 设 $y=\sin x$，$y'=\cos x$，此时 y 的二阶导数

$$y''=(y')'=(\cos x)'=-\sin x$$

定义 (二阶导数)

一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数，我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的**二阶导数**，记作 y'' 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')' \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

- 设 $y=\sin x$，$y'=\cos x$，此时 y 的二阶导数

$$y''=(y')'=(\cos x)'=-\sin x$$

- 相应地，$y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的**一阶导数**

- 类似地，二阶导数的导数叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数……，一般地，$(n-1)$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数，分别记作

$$y''',\ y^{(4)},\ \cdots,\ y^{(n)} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},\ \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}.$$

- 类似地，二阶导数的导数叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数……，一般地，$(n-1)$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数，分别记作

$$y''',\ y^{(4)},\ \cdots,\ y^{(n)} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3},\ \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

- 二阶及二阶以上的导数统称高阶导数.

- 类似地，二阶导数的导数叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数……，一般地，$(n-1)$ 阶导数的导数叫做n 阶导数，分别记作

$$y''',\ y^{(4)},\ \cdots,\ y^{(n)} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3},\ \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

- 二阶及二阶以上的导数统称高阶导数.
- 函数 $y=f(x)$ 具有 n 导数，则称函数 $f(x)$ 为n 阶可导. 若函数 $f(x)$ 在点 x 具有 n 阶导数，则 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定有一切低于 n 阶的导数.

例

求函数 $y = x^2 + 2x$ 的二阶导数

例

求函数 $y = x^2 + 2x$ 的二阶导数

解

$$y' = \left(x^2 + 2x\right) = 2x + 2$$

$$y'' = (2x + 2)' = 2$$

例

求函数 $y = xe^x$ 的二阶导数.

例

求函数 $y = xe^x$ 的二阶导数.

解

$$y' = \left(xe^x\right)' = (x)' \cdot e^x + x \cdot \left(e^x\right)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

例

求函数 $y = xe^x$ 的二阶导数.

解

$$y' = \left(xe^x\right)' = (x)' \cdot e^x + x \cdot \left(e^x\right)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

$$\begin{aligned} y'' = \left[e^x(x+1)\right]' &= \left(e^x\right)' \cdot (x+1) + e^x(x+1)' \\ &= e^x(x+1) + e^x \\ &= e^x(x+2) \end{aligned}$$

随堂练习

(1) 求函数 $y=2x^2+\ln x$ 的二阶导数.

(2) 设 $f''(x)$ 存在，求函数 $y=f(x^2)$ 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

随堂练习

(1) **求函数 $y = 2x^2 + \ln x$ 的二阶导数.**

解

$$y' = (2x^2 + \ln x)' = 4x + \frac{1}{x}$$

$$y'' = \left(4x + \frac{1}{x}\right)' = 4 - \frac{1}{x^2}$$

随堂练习

(2) **设 $f''(x)$ 存在，求函数 $y=f(x^2)$ 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$**

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x}=f'\left(x^2\right)\cdot\left(x^2\right)'=2x\cdot f'\left(x^2\right)$$

随堂练习

(2) **设 $f''(x)$ 存在，求函数 $y=f(x^2)$ 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$**

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x}=f'\left(x^2\right)\cdot\left(x^2\right)'=2x\cdot f'\left(x^2\right)$$

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x\cdot f'\left(x^2\right)\right)$$

随堂练习

(2) **设 $f''(x)$ 存在，求函数 $y=f(x^2)$ 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$**

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x}=f'\left(x^2\right)\cdot\left(x^2\right)'=2x\cdot f'\left(x^2\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x\cdot f'\left(x^2\right)\right)\\&=(2x)'\cdot f'\left(x^2\right)+2x\cdot\left(f'\left(x^2\right)\right)'\end{aligned}$$

随堂练习

(2) **设 $f''(x)$ 存在，求函数 $y=f(x^2)$ 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$**

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x}=f'\left(x^2\right)\cdot\left(x^2\right)'=2x\cdot f'\left(x^2\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x\cdot f'\left(x^2\right)\right)\\ &=(2x)'\cdot f'\left(x^2\right)+2x\cdot\left(f'\left(x^2\right)\right)'\\ &=2f'\left(x^2\right)+2x\cdot f''\left(x^2\right)\cdot\left(x^2\right)'\\ &=2f'\left(x^2\right)+4x^2\cdot f''\left(x^2\right)\end{aligned}$$

作业

- 教材习题 2-3: 1(2)(3);3(2);10.